

Test de antrenament pentru examenul de bacalaureat național 2022
Matematică $M_mate-info$

Test de antrenament 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
 • Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
 • Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Subiectul I**(30 puncte)**

- 5p** 1. Să se arate că numărul $z = (1 + i)^4 + (1 - i)^4$ este real.
- 5p** 2. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 - x - 3 = 0$ să se arate că $x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 8$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\ln(x^2 + 1) = \ln(3x - 1)$.
- 5p** 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor un număr par.
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi și $M \in [BC]$ cu $MB = \frac{1}{3}BC$. Arătați că $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$.
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Să se arate că $\sin B > \cos C$.

Subiectul al II-lea**(30 puncte)**

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Arătați că matricea A are rangul 3.
- 5p** b) Calculați B^n , unde $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se arate că $A^{2021} = I_3 + 2021 \cdot B + 1010 \cdot 2021 \cdot B^2$.
2. Pe \mathbb{R} se consideră operația $*$ definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Arătați că $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian.
- 5p** b) Să se afle $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * x * x = 3\sqrt[3]{3}$.
- 5p** c) Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathbb{R}, *)$.

Subiectul al III-lea**(30 puncte)**

1. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ pentru orice $x > 0$.
- 5p** a) Calculați $f'(x), x > 0$.
- 5p** b) Pentru $m \in \mathbb{R}$ aflați numărul rădăcinilor reale ale ecuației $\ln x = mx$.
- 5p** c) Arătați că există cel puțin 2022 perechi de numere reale (a, b) cu $a, b > 0, a \neq b$ și $a^b = b^a$.
2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = (x - 1) \cdot e^x, F(x) = (x - 2) \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Arătați că F este o primitivă a lui f .
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 (x - 1)(x - 2) \cdot e^{2x} dx$.
- 5p** c) Dacă $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f , arătați că $G(x) \geq G(1)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.